POSICIÓN RELATIVAS DE PLANOS I

Ejercicio nº 1.-

Dados los planos:

$\pi: 4x + my + mz = 6$ y $\sigma: mx + y + z + 3 = 0$

estudia su posición relativa según los valores de m.

Ejercicio nº 2.-

Halla la posición relativa de los siguientes planos según el valor del parámetro a:

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 3 - \lambda + 2\mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$$

$$\pi_2 : 4x + ay - 2z = 5$$

Ejercicio nº 3.-

a) Halla los valores de m y n para que los siguientes planos sean paralelos:

$\pi_1: 2x - y + z - 5 = 0$ y $\pi_2: mx + ny + 2z + 3 = 0$

b) Obtén la ecuación de un plano paralelo a π_1 que pase por el punto $A(3, -2, 1)$.

Ejercicio nº 4.-

Determina, en función de a, la posición relativa de los siguientes planos:

$$\left.\begin{aligned} (a-2)x + y - z &= -1 \\ -ax + (2a-1)y + (-a+2)z &= a \\ -x + ay + z &= a \end{aligned}\right\}$$

SOLUCIONES

Solución nº 1:

Las ecuaciones de los planos son:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+my+mz=6 \\ mx+y+z=-3 \end{array}\right\}$$

- Los coeficientes de las incognitas son proporcionales si $m=2$.
  En tal caso, las ecuaciones son:
  $$\left.\begin{array}{r} 4x+2y+2z=6 \\ 2x+y+z=-3 \end{array}\right\}$$
  Los planos son paralelos, pues sus términos independientes no siguen la misma relación de proporcionalidad que los coeficientes de las incógnitas.
- Si $m\neq 2$, los planos se cortan en una recta, pues el sistema es compatible indeterminado de rango 2.

Solución nº 2:

π_1, expresado de forma implícita, es:

$$2x+2y-z=5$$

Así, tenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y-z=5 \\ 4x+ay-2z=5 \end{array}\right\}$$

- Los coeficientes de las incógnitas son proporcionales si $a=4$.
  En tal caso, los planos son paralelos, pues sus términos independientes no siguen la misma relación de proporcionalidad que los coeficientes de las incógnitas.
- Si $a\neq 4$, los planos se cortan en una recta, pues el sistema es compatible indeterminado de rango 2.

Solución nº 3:

a) Si π_1 y π_2 han de ser paralelos, se tiene que:

$$\frac{m}{2}=\frac{n}{-1}=\frac{2}{1} \quad\rightarrow\quad m=4,\ n=-2$$

b) El plano buscado ha de ser de la forma: $2x-y+z+D=0$

Si contiene al punto A, debe verificarse:

$$2\cdot\ 3-1(-2)+1+D=0 \quad\rightarrow\quad D=-9$$

El plano será: $2x-y+z-9=0$

Solución nº 4:

Estudiamos la posición relativa a partir de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} a-2 & 1 & -1 \\ -a & 2a-1 & -a+2 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^3-a^2-a+1=(a-1)^2\cdot(a+1)$$

- $a=1$
  $$\left.\begin{array}{r} -x+y-z=1 \\ -x+y+z=1 \\ -x+y+z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Tenemos dos planos coincidentes } (2^{\underline{o}}\ \text{y}\ 3^{\underline{o}}) \\ \text{y el otro } (1^{\underline{o}}) \text{ los corta.}\end{array}$$
- $a=-1$
  $$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{(3^{\underline{a}})+(1^{\underline{a}})}{\xrightarrow{(2^{\underline{a}})+3\cdot(1^{\underline{a}})}} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -1 \\ -8 & 0 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  Los tres planos se cortan en una recta.
- $a\neq 1$ y $a\neq -1$, los tres planos se cortan en un punto.